

Задачи к введению в инварианты графов

С. К. Ландо

21 ноября 2021 г.

Граф это пара, состоящая из конечного множества вершин и конечно-го множества ребер. Два графа называются *изоморфными*, если существует взаимно-однозначное отображение множества вершин первого графа в множество вершин второго графа, переводящее множество ребер первого графа взаимно-однозначно в множество ребер второго графа. Изоморфные графы не отличаются друг от друга, и о них можно говорить как об одном и том же графе.

Граф можно представлять различными способами, и по разным представлениям трудно определить, задают ли они один и тот же граф, или различные графы. Другими словами, задача определения *изоморфизма графов* является вычислительно сложной. Инварианты графов предназначены для того, чтобы различать графы. *Инвариант графов* — это функция на графах, принимающая одинаковые значения на изоморфных графах. Некоторые инварианты (например, число ребер или число компонент связности) легко вычислить, однако они плохо различают графы: графов с данным числом ребер очень много. Другие инварианты могут хорошо различать графы, однако их, как правило, трудно вычислить.

На занятии мы обсудим некоторые инварианты графов, которые относительно несложно вычислить, но которые различают графы гораздо лучше, чем, скажем, число ребер. Многие из этих инвариантов являются полиномиальными — значение такого инварианта на графе это многочлен.

Необходимые предварительные знания. Для понимания материала необходимо уметь выполнять операции над многочленами.

Через $\chi_G(c)$ обозначим хроматическую функцию графа G .

Задача 1. Рассуждая по индукции, найдите $\chi_{C_n}(c)$ для произвольного цикла длины n .

Задача 2. Пусть G — граф. Докажите, что хроматический многочлен графа, полученного из G добавлением одной вершины, соединенной с одной из его вершин, получается из хроматического многочлена графа G умножением на $c - 1$.

Задача 3. Подсчитайте хроматический многочлен для а) деревьев на n вершинах; б) триангуляций (т.е. циклов, в которых проведены “попарно непересекающиеся диагонали”, разбивающие их на треугольники, см. рис. 1. Покажите, в частности, что хроматическая функция одинакова для всех

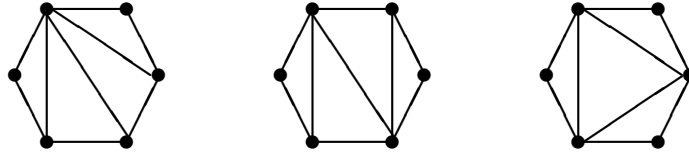


Рис. 1: Различные триангуляции цикла C_6

деревьев и для всех триангуляций на данном числе вершин, а значит, не различает попарно неизоморфные графы этих типов.

Задача 4. Докажите, что если граф Γ имеет k компонент связности, то его хроматический многочлен $\chi_\Gamma(c)$ делится на c^k и не делится на c^{k+1} .

Задача 5. Докажите, что второй коэффициент хроматического многочлена $\chi_\Gamma(c)$ графа Γ с n вершинами (коэффициент при c^{n-1}) равен числу ребер в Γ , взятому со знаком минус.

Задача 6. Докажите, что знаки коэффициентов хроматического многочлена чередуются — коэффициент при c^ℓ имеет знак $(-1)^{n-\ell}$ или равен нулю, если ℓ меньше количества компонент связности в графе Γ с n вершинами.

Задача 7. *Ориентацией* графа называется выбор направлений ребер в нем. Ориентация называется *ациклической*, если в графе отсутствуют циклы, идущие в направлении ориентированных ребер. Докажите, что число ациклических ориентаций графа равно $|\chi_\Gamma(-1)|$ — модулю значения хроматического многочлена в точке -1 . Проверьте, что это утверждение распространяется и на графы с кратными ребрами и петлями.

Например, для графа $A_2 = K_2$ имеем $\chi_{A_2}(-1) = 2$, и действительно, обе возможные ориентации отрезка являются ациклическими. В свою очередь, $\chi_{K_3}(-1) = -6$, и из восьми возможных ориентаций треугольника ровно две не являются ациклическими.

Задача 8. Остовный подграф (т.е., подграф, содержащий все вершины графа и некоторые из его ребер) графа Γ на $2n$ вершинах называется *совершенным паросочетанием*, или *1-фактором*, если он состоит из n ребер, никакие два из которых не имеют общих концов. Например, в квадрате C_4 два совершенных паросочетания, а в полном графе K_4 их три.

Подсчитайте число совершенных паросочетаний в а) цепочках A_n ; б) циклах C_n ; в) полных графах K_n ; г) в триангуляциях (см. задачу 3).

Задача 9. Найдите все графы с шестью вершинами, имеющие 6 совершенных паросочетаний.