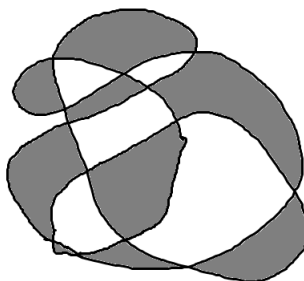


Листок по гипотеза Васильева.
Классификация двумерных поверхностей.
Автор: Василий Олегович Мантуров
e-mail: vomanturov@yandex.ru

Гипотеза Васильева о планарности оснащенных графов.

1. Докажите, что каждый связный оснащенный 4-валентный граф имеет поворачивающий обход.
2. Докажите, что если связный оснащенный 4-граф имеет структуру источник-сток, то таких структур ровно две.
3. * Дан граф на плоскости без самопересечения, у которого степень каждой вершины четная. Что области, на которые граф разбивает плоскость, можно покрасить в 2 цвета так, что области, раскрашенные в один цвет, не имеют общего ребра. Результат этой задачи можно использовать без доказательства в остальных номерах.



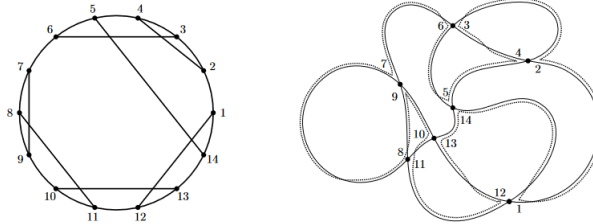
4. Покажите, что задача 3 неверна, если рассматривать граф, у которого есть вершина нечетной степени.
5. Докажите, что связный планарный граф имеет структуру источник-сток. (**Подсказка:** воспользуйтесь результатом задачи 3 и задайте обход по раскраске.)

Определение. Назовем *хордовой диаграммой* конечный трехвалентный граф, состоящий из цикла, проходящего через все верши-

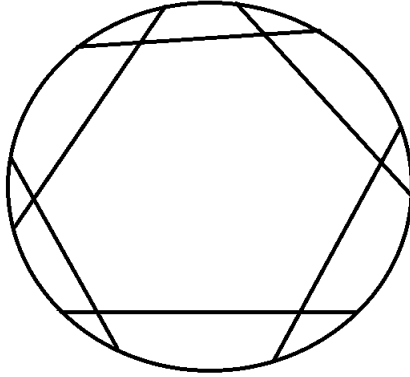
ны (окружности хордовой диаграммы) по одному разу и оставшихся ребер, которые мы будем называть хордами хордовой диаграммы.

Определение. Назовем *обходом* это последовательность ребер, где конец следующего ребра является началом предыдущего. При этом эти ребра не противоположные. Пусть ребер $2n$. Строим окружность. Отмечаем на ней равномерно $2n$ точек. Соединяем хордами.

6. Сопоставим оснащеному связному 4-графу и его обходу хордовую диаграмму с оснащениями 0 и 1. Как связаны хордовые диаграммы оснащенных связных 4-валентных графов с разными обходами?



7. Граф двудольный тогда и только тогда, когда он не содержит нечетного цикла. (**Подсказка:** Для графа, у которого есть нечетный цикл, покажите, что вершины этого цикла нельзя разбить на 2 группы.)
8. Рассмотрим хордовую диаграмму, где каждая хорда зацеплена с соседней, как на рисунке. Покажите, что такая хордовая диаграмма планарна тогда и только тогда, когда количество хорд четно. (**Подсказка:** Для доказательства непланарности воспользуйтесь рассуждениями, схожими с рассуждениями для доказательства непланарности графов $K_{3,3}$ и K_5 из пятничного занятия.)



9. Хордовая диаграмма (рассматриваемая как трехвалентный граф) вложима в плоскость тогда и только тогда, когда ее хорды можно разбить на два семейства попарно не зацепленных ("не пересекающихся") хорд.
10. Разбить хорды хордовой диаграммы на два семейства попарно не зацепленных (не пересекающихся) хорд можно тогда и только тогда, когда ее граф пересечений двудольный.
11. Рассмотрим оснащенный граф, отвечающий хордовой диаграмме, содержащей $(2n + 1)$ -угольник (быть может, имеющей другие хорды); все хорды - с оснащением 0. Доказать, что такой граф обладает препятствием Васильева.
12. Если у графа нет структуры источник-сток, то у него есть препятствие Васильева (два цикла с единственным трансверсальным пересечением).

