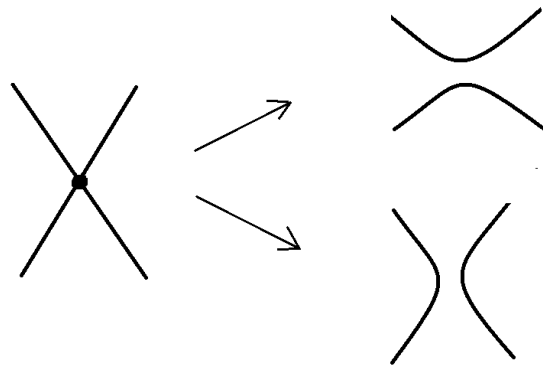


Автор: Василий Олегович Мантуров  
e-mail: vomanturov@yandex.ru

## Теория миноров для оснащенных графов

**Определение 1.** Назовем элементарным упрощением оснащенного 4-графа в вершине  $X$  граф, получаемый из  $\Gamma$  удалением вершины и объединением пар соседних полурёбер одним из двух способов.



Граф  $D$  называется потомком графа  $\Gamma$ , если  $D$  получается из  $\Gamma$  последовательностью :

- 1) элементарных упрощений.
- 2) удалением связных компонент

**Упражнение 1.** Если  $\Gamma$  имеет структуру источник-сток, то любой его потомок имеет структуру источник-сток.

**Определение 2.** Назовем свойство  $P$  минорно замкнутым, если для каждого графа  $\Gamma$  и его минора  $D$  если  $\Gamma$  обладает свойством  $P$ , то и  $D$  обладает свойством  $P$ .

**Упражнение 2.** Показать что планарность является минорно замкнутым свойством.

**Определение 3.** Вложимость в произвольную ориентируемую поверхность с учетом структуры источник-сток означает, что те (полу)ребра графа, которые формально противоположны, должны быть противоположными на поверхности.

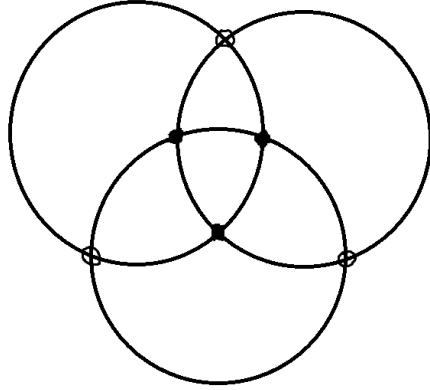
**Определение 4.** Скажем, что оснащенный 4-граф  $\Gamma$  допускает черно-белое вложение в поверхность  $\Sigma_g$ , если имеется вложение графа  $\Gamma$  в  $\Sigma_g$  с сохранением оснащения, такое что компоненты дополнения к образу графа можно раскрасить в два цвета так, что соседние по ребру компоненты покрашены в разные цвета.

**Упражнение 3.** Покажите, что если граф вложим в поверхность  $\Sigma_g$  черно-белым образом, то и любой его потомок вложим в эту поверхность черно-белым образом.

**Упражнение 4.** Покажите, что граф вложим в некоторую ориентируемую поверхность черно-белым образом тогда и только тогда, когда этот граф имеет структуру источник-сток.

**Упражнение 5.** Покажите, что граф  $G$  вложим в тор (с сохранением оснащения), но это вложение не является черно-белым (шахматным).

**Определение 5.** Виртуальные кольца Боромео - граф с 3 вершинами и 3 окружностями, каждые 2 из которых пересекаются в 1 точке трансверсально. Этот граф является непланарным.



*Упражнение 6.* Оснащенный 4-граф со структурой источник-сток непланарен, если и только если он имеет (виртуальные кольца Боромео, обозначим его как  $B$ ) в качестве минора. Подсказка:  $(2n+1)$ -угольник (оснащенный граф, отвечающий хордовой диаграмме) имеет 3-угольник в качестве минора.

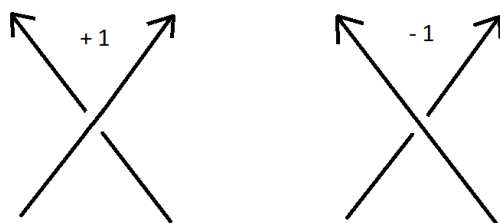
**Определение 6.** Пусть  $\Gamma$  - оснащенный 4-граф. Рассмотрим произвольное вложение графа  $\Gamma$  в  $\mathbf{R}^3$ . Любое разведение вершины  $A$  графа порождает вложение соответствующего графа в  $\mathbf{R}^3$  с точностью до изотопии.

Таким образом, любой минор графа  $\Gamma$  оказывается автоматически вложен в  $\mathbf{R}^3$ . Скажем, что граф является **внутренне заузленным**, если для любого его вложения в  $\mathbf{R}^3$  можно развести несколько вершин и удалить несколько ребер, чтобы получить нетривиальный узел.

Аналогичным образом, граф является **внутренне зацепленным**, если для любого его вложения в  $\mathbf{R}^3$  можно развести несколько вершин и удалить несколько ребер, чтобы получить нетривиальное двукомпонентное зацепление.

**Определение 7.** Пусть  $L = L_1 \sqcup L_2$  — диаграмма двухкомпонентного ориентированного зацепления. Определим коэффициент зацепления  $lk(L_1, L_2)$  как сумму знаков перекрестков, где  $L_1$  проходит сверху от  $L_2$ .

Знак перекрестка  $w(c)$  определяется так, как показано на рис. ниже:



эже:

**Упражнение 7.** Показать что коэффициент симметричен.  $lk(K_1, K_2) = lk(K_2, K_1)$

**Теорема.** Для оснащенного графа со структурой источник-сток следующие условия эквивалентны:

- 1) Он не планарен.
- 2) Он содержит “виртуальные кольца Борромео” в качестве Минора.
- 3) При погружении в плоскость у него не менее трех дополнительных точек .
- 4) Он является внутренне зацепленным.
- 5) При любом вложении графа в трехмерное пространство можно развести несколько вершин и удалить несколько ребер, чтобы получить двухкомпонентное зацепление с нечетным коэффициентом зацепления.