

Теорема Турана

Определение. Множество вершин графа называется *независимым*, если между ними нет рёбер.

Определение. *Числом независимости* графа называется наибольшее k , такое, что можно выбрать независимое множество из k вершин этого графа.

Теорема Турана. Каков бы ни был граф на n вершинах с числом независимости k , для количества e его рёбер справедливо неравенство

$$e \geq \frac{(n-r)(n+r-k)}{2k}$$

где r — остаток от деления n на k (то есть $n = qk + r$, $0 \leq r \leq k - 1$). Равенство достигается, если граф состоит из k клик, отличающихся по размеру не больше, чем на 1.

1. Какое наибольшее число рёбер может быть в двудольном графе со 100 вершинами?
2. В Зимней Школе участвует 110 школьников. Какое наименьшее число пар школьников надо презнакомить между собой кураторам, чтобы обязательно нашлось 3 школьника, попарно знакомых между собой?
3. Есть $2n+1$ батарейка ($n > 2$). Известно, что хороших среди них на одну больше, чем плохих, но какие именно батарейки хорошие, а какие плохие, неизвестно. В фонарик вставляются две батарейки, при этом он светит, только если обе — хорошие. За какое наименьшее число таких попыток можно гарантированно добиться, чтобы фонарик светил?
4. Есть $2n$ батареек ($n > 2$). Известно, что хороших среди них столько же, сколько плохих, но какие именно батарейки хорошие, а какие плохие, неизвестно. В фонарик вставляются две батарейки, при этом он светит, только если обе — хорошие. За какое наименьшее число таких попыток можно гарантированно добиться, чтобы фонарик светил?
5. Дарт Вейдер расставил на поле $4n$ дроидов, а затем приказал взяться за руки всем дроидам, которые оказались на расстоянии ровно 1 м. Выяснилось, что среди любых $n + 1$ дроидов есть взявшиеся за руки. Докажите, что за руки взялось по крайней мере $7n$ пар дроидов.